Opción A

1..- a) Determinar la abscisa de los puntos en loa que la recta tangente a la función dada $f(x) = Ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ es paralela a la recta **2x + 3y = 4 [1'25 puntos]**

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a la función dada en el apartado anterior en el punto de abscisa **x = 3 [1 punto]**

$a)$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-2}{x^2-1} \\ 3y = 4 - 2x \Rightarrow y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x \Rightarrow m = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{-2}{x^2-1} = \dfrac{-2}{3}$$

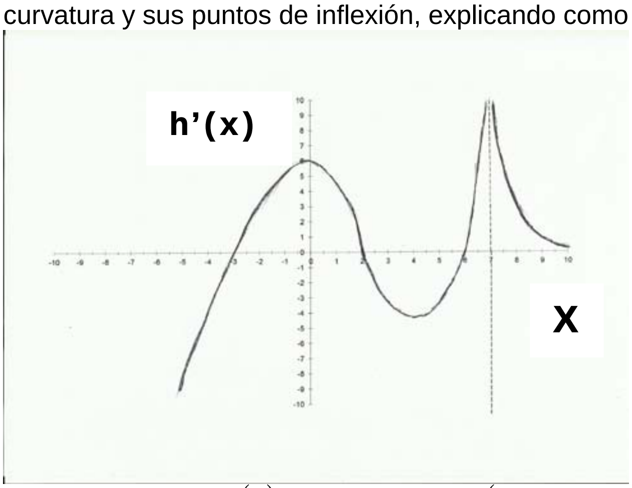
$$x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$b)$

$$\left\{\begin{array}{l} f(3) = Ln\left(\dfrac{3+1}{3-1}\right) = Ln\left(\dfrac{4}{2}\right) = Ln(2) \\ f'(3) = \dfrac{-2}{3^2-1} = \dfrac{-2}{9-1} = -\dfrac{2}{8} = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow y - Ln(2) = -\dfrac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + Ln(2)$$

$$4y = -x + 3 + 4Ln(2) \Rightarrow x + 4y - 3 - 4Ln(2) = 0$$

2.- Dada la gráfica de **h'(x)**, deduce la monotonía y extremos relativos de **h(x)**, así como la curvatura y sus puntos de inflexión, explicando como lo haces



$$Crecimiento \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / (-3 < x < 2) \cup (6 < x < 6) \cup (x > 7)$$

$$Decrecimiento \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / (x < -3) \cup (2 < x < 6)$$

$$Máximo\ relativo \Rightarrow x = 2 \Rightarrow De\ crecimiento\ pasa\ a\ decrecimiento$$

$$Mínimo\ relativo \Rightarrow x = 6 \Rightarrow De\ decrecimiento\ pasa\ a\ crecimiento$$

$$Puntos\ de\ inf\ lexión \Rightarrow h''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$Concavidad \Rightarrow \forall x \in \Re / (x < 0) \cup (4 < x < 7) \cup (x > 7) \qquad Concavidad \Rightarrow \forall x \in \Re / 0 < x < 4$$

3.- Calcular el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica que **AX – B = C**, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B + C \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B+C) \Rightarrow IX = A^{-1}(B+C) \Rightarrow X = A^{-1}(B+C)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (adj\ A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-6)} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{(-6)} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{(-6)} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-6)} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$, hallar la ecuación del plano que contiene a esta y pasa por el punto **P(0 , -2 , 1)**

El plano π queda determinado por el vector director de la recta r, el vector entre el punto **P** y un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y el tercer vector que une a **P** con el punto **G** genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (se encuentran en el mismo plano) y el último es combinación lineal de los otros dos por ello el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida.

$$R(1, -1, 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \vec{v_r} = (-2, 3, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (1, -1, 2) - (0, -2, 1) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (0, -2, 1) = (x, y+2, z-1) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3x + (y+2) - 2(z-1) - 3(z-1) - x + 2(y+2) = 0 \Rightarrow 2x + 3(y+2) - 5(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x + 3y - 5z + 11 = 0$$

Opción B

1..- Hallar la función **f(x)** tal que $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$, **f(1) = 0** , **f(e) = -1**

$$f'(x)=\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=x^{-1}=\frac{1}{x}+K$$

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+K\right)dx=ln\ x+Kx+C\Rightarrow\begin{cases} f(1)=0\Rightarrow ln\ 1+K\cdot 1+C=0\Rightarrow 0+K+C=0\Rightarrow \\ f(e)=-1\Rightarrow ln\ e+K\cdot e+C=-1\Rightarrow 1+Ke+C=-1\Rightarrow\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} K+C=0 \\ Ke+C=-2\end{cases}\Rightarrow K-Ke=2\Rightarrow K(1-e)=2\Rightarrow K=\frac{2}{1-e}\Rightarrow\frac{2}{1-e}+C=0\Rightarrow C=-\frac{2}{1-e}$$

$$f(x)=ln\ x+\left(\frac{2}{1-e}\right)x-\frac{2}{1-e}$$

2.- Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, determinar razonadamente:

a) El Dominio **[0’25 puntos]**
b) Los puntos de corte con los ejes coordenados **[0’25 puntos]**
c) Las ecuaciones de sus asíntotas, si es que las tiene **[0’50 puntos]**
d) Intervalos de crecimiento. Máximos y mínimos relativos **[1 punto]**
e) Su representación gráfica **[0’25 puntos]**

$a)$

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow f(1)=\dfrac{2}{1^2-1}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución \\ x=-1\Rightarrow f(-1)=\dfrac{2}{(-1)^2-1}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\end{cases}$$

$$Dom(f)=\forall x\in\Re-\{-1\ ,1\}$$

$b)$

$$\begin{cases} Con\ OX\Rightarrow y=f(x)=0\Rightarrow\dfrac{2}{x^2-1}=0\Rightarrow 2\neq 0\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow No\ hay\ puntos\ de\ corte \\ Con\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow\dfrac{2}{0^2-1}=\dfrac{2}{-1}=-2\Rightarrow En\ (0\ ,-2)\end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

c)

Asíntotas verticales

$$x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{2}{\left(-1^-\right)^2-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{2}{\left(-1^+\right)^2-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{2}{\left(1^-\right)^2-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{2}{\left(1^+\right)^2-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{\infty}=0 \Rightarrow \text{Existe asíntota horizontal},\ y=0,\text{cuando } x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(-x)^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{\infty}=0 \Rightarrow \text{Existe asíntota horizontal},\ y=0,\text{cuando } x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3-x}=\frac{2}{\infty}=0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(-x)^3-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{-x^3+x}=\frac{2}{-\infty}=0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x\to-\infty$$

d)

$$f'(x)=2\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=-4\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} -4<0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x>0 \\ \left(x^2-1\right)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

	$-\infty$ … **0**	**0** … ∞
- 4 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 -1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

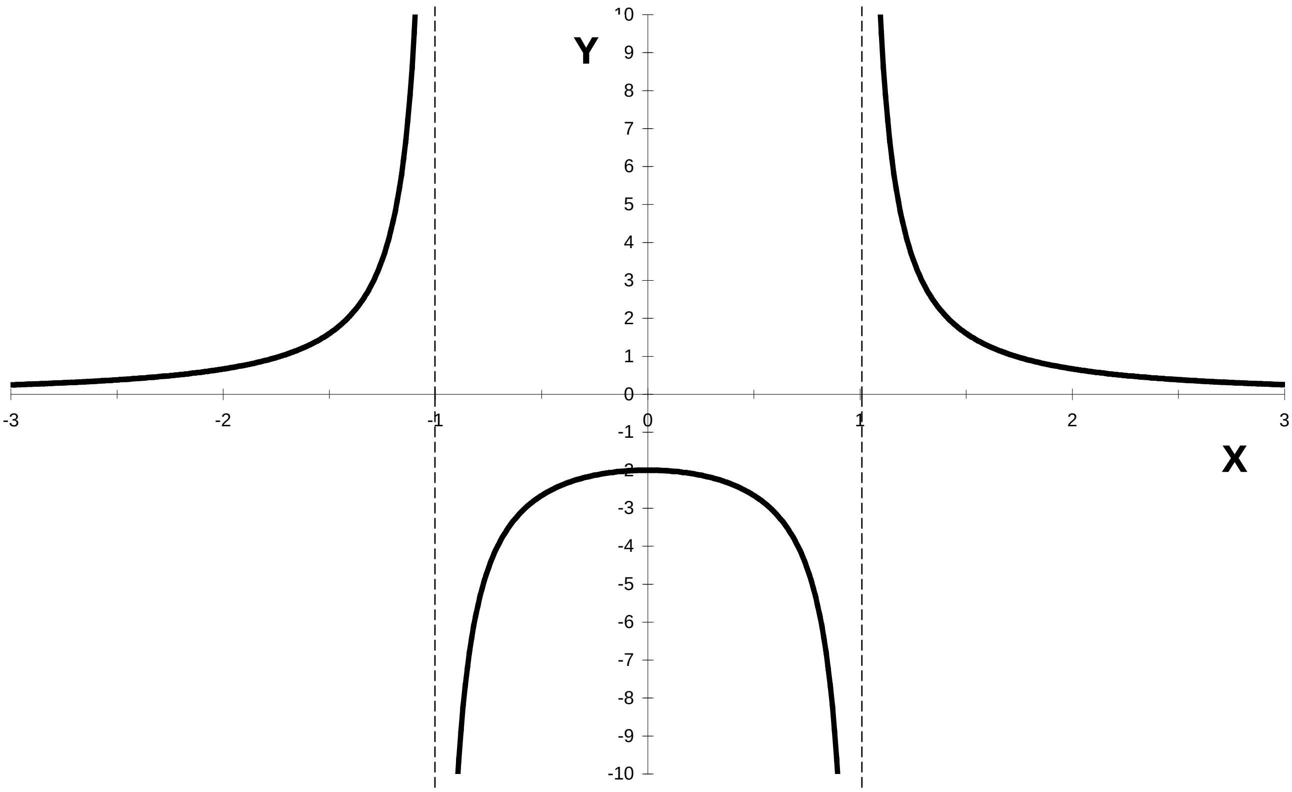
Crecimiento $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(-1<x<0)$

Decrecimiento $\forall x\in\Re/(0<x<1)\cup(x>1)$

Máximo relativo en x = 0 $f(0)=\dfrac{2}{0^2-1}=-2$

Continuación del Problema 2 de la opción B

e)



3.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} z & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$, halla sin desarrollar el valor de: $\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x+1 & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \end{vmatrix}$

explicando las propiedades de los determinantes que utilices

$$\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x & x+2 \\ y & 3y & y+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & z+2 \\ x & 1 & x+2 \\ y & 1 & y+2 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l} I.- Si\ todos\ los\ elementos\ de\ una\ columna\ de\ una\ matriz\ estan \\ compuesto\ de\ \ la\ suma\ de\ dos\ o\ mas\ sumandos\ se\ descompone\ en\ su- \\ ma\ de\ dos\ o\ mas\ determinantes \end{array} \right)$$

$$3\begin{vmatrix} z & z & z+2 \\ x & x & x+2 \\ y & y & y+2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} z & 0 & z+2 \\ y & 1 & y+2 \\ x & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l} II.- Si\ \ permutamos\ dos\ columnas\ de\ una\ matriz\ su\ determi- \\ nante\ cambia\ de\ signo \end{array} \right)$$

$$3\cdot 0 - \begin{vmatrix} z & 0 & z \\ y & 1 & y \\ x & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & 0 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l} III.- Si\ \ una\ matriz\ tiene\ dos\ columnas\ iguales\ su\ determinante\ es\ nulo \\ Tambien\ la\ I \end{array} \right)$$

$$= 0 - 0 - 7 = -7$$

4.- Estudiar la posición relativa del plano $\pi \equiv 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ

Una recta y un plano pueden ser paralelos o cortarse, si son paralelos, como sus vectores directores son perpendiculares tendremos que el producto escalar de ambos es nulo, en ese caso veremos si la ecuación resultante de la verificación de los puntos de la recta en el plano sea un sistema compatible determinado, porque si fuese indeterminado la recta estaria contenida en el plano, finalmente en los casos de no nulidad del producto escalar el plano y la recta se cortarán en un punto

$$r \equiv \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x - (2x - 1) + 2z = -1 \Rightarrow x - 2x + 1 + 2z = -1 \Rightarrow 2z = x - 2 \Rightarrow z = -1 + \dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -1 + \dfrac{\mu}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (5\ , \lambda\ , -2) \\ \overrightarrow{v_r} = \left(1\ , 2\ , \dfrac{1}{2}\right) \equiv (2\ , 4\ , 1) \end{cases} \Rightarrow Paralelos \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (5\ , \lambda\ , -2) \cdot (2\ , 4\ , 1) = 0 \Rightarrow$$

$$10 + 4\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 4\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-2\} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} \neq 0 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = -1 + 4\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}$$

$$Si\ \lambda = -2 \Rightarrow \pi \equiv 5x - 2y - 2z + 1 = 0 \Rightarrow 5 \cdot 2u - 2 \cdot (-1 + 4\mu) - 2 \cdot (-1 + \mu) + 1 = 0$$

$$10\mu + 2 - 8\mu - 2 - 2\mu + 1 = 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ paralelos$$